УДК 532.591

А. А. Зайцев, П. А. Кулаков

АНАЛИЗ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ВОЛН В ДВУСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

Выполнен подробный анализ синусоидальных волн в двуслойной жидкости. Изучены дисперсионные соотношения для коротких и длинных волн. Успеху существенно способствовала созданная нами методика.

A detailed analysis of sinusoidal waves in two-layer liquid is made. The dispersion relations for short and long waves are studied. The success was helped significantly by a technique created by us.

Ключевые слова: двуслойная жидкость, синусоидальные волны, дисперсионные соотношения, приближение Буссинеска, фазовая скорость коротких и длинных волн, новая методика.

Key words: two-layer liquid, sinusoidal waves, dispersion relations, Boussinesq approximation, phase velocity of short and long waves, new technique.

Введение

В этой работе будет выполнен анализ синусоидальных волн в двуслойной жидкости (рис. 1). Это значит, что все характеристики волнового движения содержат множитель exp $i\theta$, $\theta = \omega t - kx$.

Цель работы. Рассмотреть решение задачи о колебаниях синусоидальных волн в стандартной постановке для случая двуслойной жидкости и произвольных длин волн.

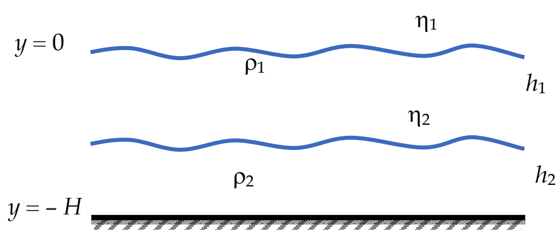

Рис. 1. Двуслойная жидкость

1. Исходная постановка задачи о колебаниях в двухслойной жидкости

В этом пункте дается исходная (в основном физическая) постановка задачи о колебаниях в двуслойной жидкости. Как и в случае однородной жидкости, рассматриваются лишь *потенциальные движения жидко-*

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2016. № 4. С. 32 – 43.

сти. Учитывается, что полное давление p в каждом слое является суммой статической и динамической составляющих,

$$p_n = p_{sn} + p_{nd},\ n = 1, 2.$$

причем статическая составляющая давления p_{sn} зависит только лишь от вертикальной координаты,

$$p_{sn} = p_{sn}(y),\ n = 1, 2.$$

Толщины слоев считаются равными d_1 и d_2. Полная глубина жидкости обозначается H, так что справедливо равенство $H = d_1 + d_2$.

Плотности слоев считаются равными ρ_1 и ρ_2. Поскольку рассматривается устойчиво стратифицированная жидкость, то плотности подчиняются неравенству $\rho_1 < \rho_2$.

Уравнения волновых движений в соответствующих слоях естественным образом получаются из уравнений движений в однородной жидкости и имеют вид

$$\rho_1 u_{1,t} + p_{1,x} = 0,\ \rho_1 v_{1,t} + p_{1,y} + g\rho_1 = 0,\ u_{1,x} + v_{1,y} = 0,\ u_{1,y} - v_{1,x} = 0,\ -d_1 + \eta_2 < y < \eta_1;$$
$$\rho_2 u_{2,t} + p_{2,x} = 0,\ \rho_2 v_{2,t} + p_{2,y} + g\rho_2 = 0,\ u_{2,x} + v_{2,y} = 0,\ u_{2,y} - v_{2,x} = 0,\ -H < y < d_1 + \eta_2.$$

Здесь u_1, v_1 — горизонтальная и вертикальная компоненты в верхнем слое; p_1 — полное давление в том же слое; u_2, v_2 — горизонтальная и вертикальная компоненты в нижнем слое; p_2 — полное давление в нижнем слое.

С граничными условиями ситуация сложней. Проще дело обстоит с *кинематическим* и *динамическим условиями на свободной поверхности*. Они имеют следующий вид:

$$v_1\big|_{y=\eta_1} = \eta_{1,t},\ p_1\big|_{y=\eta_1} = 0.$$

Условием на дне снова служит *условие непротекания*, поэтому оно будет таким:

$$v_2\big|_{y=-H} = 0.$$

На единственной внутренней границе раздела должны выполняться *два кинематических* и *одно динамическое условие*.

Из двух кинематических условий одним является требование *непрерывности вертикальной компоненты скорости при переходе через границу раздела*, то есть оно имеет следующий вид:

$$v_1\big|_{y=-d_1+\eta_2} = v_2\big|_{y=-d_1+\eta_2}.$$

Второе кинематическое условие связывает отклонение границы раздела от горизонтали со значением вертикальной компоненты скорости на этой границе, то есть:

$$v_1\big|_{y=-d_1+\eta_2} = \eta_{2,t}.$$

Наконец, динамическое условие состоит в требовании *непрерывности полного давления при переходе через границу раздела*, то есть оно таково:

$$p_1\big|_{y=-d_1+\eta_2} = p_2\big|_{y=-d_1+\eta_2}.$$

В этих граничных условиях символы η_1 и η_2 обозначают отклонения свободной поверхности и границы раздела от горизонтального уровня.

Замечание 1.1. Если бы не было условия непрерывности вертикальной компоненты скорости и полного давления при переходе через границу раздела, то эта граница становилась бы разрывной.

2. Математическая постановка задачи о колебаниях в двуслойной жидкости

Требуется найти отклонения уровня на каждой границе раздела и обе компоненты (горизонтальную и вертикальную) скорости, а также полное давление, которые в слоях $-d_1 + \eta_2 < y < \eta_1$ и $-H < y < d_1 + \eta_2$ удовлетворяют системе четырех дифференциальных уравнений

$$\rho_1 u_{1,t} + p_{1,x} = 0,\ \rho_1 v_{1,t} + p_{1,y} + g\rho_1 = 0,\ u_{1,x} + v_{1,y} = 0,\ u_{1,y} - v_{1,x} = 0,\ -d_1 + \eta_2 < y < \eta_1,$$
$$\rho_2 u_{2,t} + p_{2,x} = 0,\ \rho_2 v_{2,t} + p_{2,y} + g\rho_2 = 0,\ u_{2,x} + v_{2,y} = 0,\ u_{2,y} - v_{2,x} = 0,\ -H < y < d_1 + \eta_2,$$

граничным условиям

$$v_1\big|_{y=\eta_1} = \eta_{1,t},\ p_1\big|_{y=\eta_1} = 0,\ v_1\big|_{y=-d_1+\eta_2} = \eta_{2,t},$$
$$v_2\big|_{y=-d_1+\eta_2} = \eta_{2,t},\ p_1\big|_{y=-d_1+\eta_2} = p_2\big|_{y=-d_1+\eta_2},\ v_2\big|_{y=-H} = 0,$$

условиям периодичности

$$\eta_1(x + 2\pi/k) = \eta_1(x),\ u_1(x + 2\pi/k, y) = u_1(x, y),$$
$$v_1(x + 2\pi/k, y) = v_1(x, y),\ p_1(x + 2\pi/k, y) = p_1(x, y);$$
$$\eta_2(x + 2\pi/k) = \eta_2(x),\ u_2(x + 2\pi/k, y) = u_2(x, y),$$
$$v_2(x + 2\pi/k, y) = v_2(x, y),\ p_2(x + 2\pi/k, y) = p_2(x, y)$$

и условию отсутствия дрейфа в каждом из двух слоев

$$\langle u_1(x,y)\rangle = 0,\ \langle u_2(x,y)\rangle = 0.$$

3. Выражения для профиля и динамических характеристик синусоидальной волны

В случае синусоидальной волны для профилей свободной поверхности и границы раздела имеют место такие выражения:

$$\eta_1 = a_1\exp(i\theta),\ \eta_2 = a_2\exp(i\theta),\ a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0,\ \theta = \omega t - kx. \quad (3.1)$$

Здесь a_1 – амплитуда колебаний свободной поверхности; a_2 – амплитуда колебаний границы раздела; θ – фаза колебаний; ω – их частота; k – волновое число.

Аналогичное представление имеют обе компоненты скорости, то есть для них справедливы следующие формулы:

$$u_1 = u_{r1}(y)\exp(i\theta),\ v_1 = v_{r1}(y)\exp(i\theta),\ -d_1 + \eta_2 < y < \eta_1, \quad (3.2)$$

$$u_2 = u_{r2}(y)\exp(i\theta),\ v_2 = v_{r2}(y)\exp(i\theta),\ -H < y < -d_1 + \eta_2. \quad (3.3)$$

Представления для полного давления будут такими:

$$p_1 = p_{s1}(y) + p_{r1}(y)\exp(i\theta),\ -d_1 + \eta_2 < y < \eta_1, \quad (3.4)$$
$$p_2 = p_{s2}(y) + p_{r2}(y)\exp(i\theta),\ -H < y < -d_1 + \eta_2, \quad (3.5)$$

где первые слагаемые в правых частях обоих выражений являются статическими составляющими полного давления, а вторые слагаемые там — его динамическими составляющими. Распределения по слоям статической составляющей полного давления таковы:

$$p_{s1}(y) = -\rho_1 g y,\ -d_1 < y < 0;\ p_{s2}(y) = -\rho_2 g y + (\rho_1 - \rho_2) g d_1,\ -H < y < -d_1.$$

Важным следствием являются следующие выражения для полных давлений:

$$p_1 = p_{r1}(y)\ \exp(i\theta) - \rho_1 g y,\ -d_1 + \eta_2 < y < \eta_1, \quad (3.6)$$
$$p_2 = p_{r2}(y)\ \exp(i\theta) - \rho_2 g y + (\rho_1 - \rho_2) g d_1,\ -H < y < -d_1 + \eta_2. \quad (3.7)$$

После подстановки выражений (3.1—3.7) и необходимых упрощений в уравнения и граничные условия пункта 2 получаем постановку задачи о синусоидальных волнах в двуслойной жидкости.

4. Постановка задачи о синусоидальных волнах в двуслойной жидкости

Найти функции $u_{r1}(y)$, $v_{r1}(y)$, $p_{r1}(y)$, определенные на промежутке $-d_1 < y < 0$, и функции $u_{r2}(y)$, $v_{r2}(y)$, $p_{r2}(y)$, определенные на промежутке $-H < y < -d_1$, которые удовлетворяют следующим двум дифференциально-алгебраическим системам:

$$\rho_1 \omega u_{r1}(y) - k p_{r1}(y) = 0,\ \rho_1 i\omega v_{r1}(y) + p'_{r1}(y) = 0,$$
$$k u_{r1}(y) + i v'_{r1}(y) = 0,\ u'_{r1}(y) + ik v_{r1}(y) = 0 \text{ при } -d_1 < y < 0;$$
$$\rho_2 \omega u_{r2}(y) - k p_{r2}(y) = 0,\ \rho_2 i\omega v_{r2}(y) + p'_{r2}(y) = 0,\ k u_{r2}(y) + i v'_{r2}(y) = 0,$$
$$u'_{r2}(y) + ik v_{r2}(y) = 0 \text{ при } -H < y < -d_1,$$

а также граничным условиям

$$v_{r1}\big|_{y=0} = i\omega a_1,\ p_{r1}\big|_{y=0} = g\rho_1 a_1,\ v_{r1}\big|_{y=-d_1} = i\omega a_2,\ v_{r2}\big|_{y=-d_1} = i\omega a_2,$$
$$p_{r1}\big|_{y=-d_1} - p_{r2}\big|_{y=-d_1} = g(\rho_1 - \rho_2) a_2,\ v_{r2}\big|_{y=-H} = 0.$$

5. Процедура вывода общего решения задачи о синусоидальных волнах в двуслойной жидкости

Поставленная задача решается в несколько этапов. В этом пункте выполняется процедура вывода общего решения системы дифференциально-алгебраических уравнений для синусоидальных волн в верхнем слое без учета граничных условий. Учет граничных условий будет сделан в следующем пункте.

Этап 1. Вывод общего решения системы дифференциально-алгебраических уравнений для синусоидальных волн в верхнем слое. Результаты таковы.

Сводка исходных представлений для функций $u_{r1}(y)$, $v_{r1}(y)$ и $p_{r1}(y)$:

$$u_{r1}(y) = -iB\mathrm{ch}(ky) - iA\mathrm{sh}(ky),\ v_{r1}(y) = A\mathrm{ch}(ky) + B\,\mathrm{sh}(ky),$$
$$p_{r1}(y) = -\rho_1 \frac{i\omega}{k} B\mathrm{ch}(ky) - \rho_1 \frac{i\omega}{k} A\mathrm{sh}(ky),\ -d_1 < y < 0.$$

Здесь A и B — неопределенные коэффициенты, значения которых будут определены позже из граничных условий.

Как было сказано в начале предыдущего пункта, здесь ставится цель выполнить процедуру вывода общего решения системы уравнений для синусоидальных колебаний в нижнем слое. При этом будет учтено условие непротекания на дне.

Этап 2. Вывод общего решения системы дифференциально-алгебраических уравнений для синусоидальных волн в нижнем слое.

Сводка исходных представлений для функций $u_{r2}(y)$, $v_{r2}(y)$ и $p_{r2}(y)$:

$$u_{r2}(y) = -iD\mathrm{ch}(k(y+H)),\ v_{r2}(y) = D\mathrm{sh}(k(y+H)),$$
$$p_{r2}(y) = -\rho_2 \frac{i\omega}{k} D\mathrm{ch}(k(y+H)),\ -H < y < -d_1.$$

Здесь D — неопределенный коэффициент, значение которого будет определено позже из граничных условий.

6. Продолжение процедуры решения краевой задачи о синусоидальных волнах в двуслойной жидкости. Использование граничных условий на свободной поверхности и границе раздела

В этом пункте ставится цель использовать кинематические и динамические граничные условия на свободной поверхности и границе раздела, чтобы получить более точные (конкретные) выражения для общих решений систем дифференциально-алгебраических уравнений.

Процедуру использования граничных условий на свободной поверхности и границе раздела разделим на два этапа. Содержанием этапа 1 является процедура использования граничных условий на свободной поверхности для определения предварительных значений коэффициентов A и B. Соответственно, этап 2 (один из главных данного исследования) будет посвящен процедуре использования граничных условий на границе раздела двуслойной жидкости для того, чтобы найти окончательные выражения для общих решений систем дифференциально-алгебраических уравнений.

Для удобства анализа приведем сводку кинематических и динамических граничных условий на свободной поверхности и границе раздела двуслойной жидкости.

Сводка кинематических и динамических граничных условий на свободной поверхности и границе раздела двуслойной жидкости:

$$v_{r1}\big|_{y=0} = i\omega a_1,\ p_{r1}\big|_{y=0} = g\rho_1 a_1.$$

Сводка кинематических и динамических граничных условий на границе раздела двуслойной жидкости:

$$v_{r1}\big|_{y=-d_1} = i\omega a_2,\ v_{r2}\big|_{y=-d_1} = i\omega a_2,\ p_{r1}\big|_{y=-d_1} - p_{r2}\big|_{y=-d_1} = g(\rho_1 - \rho_2)a_2.$$

Переходим к реализации намеченного плана действий.

Этап 1. Использование кинематических и динамических граничных условий на свободной поверхности и границы раздела, чтобы получить более точные выражения для общих решений систем дифференциально-алгебраических уравнений

Этап 1.1. Процедура использования граничных условий на свободной поверхности двуслойной жидкости для определения предварительных значений коэффициентов A и B. Результаты таковы:

Сводка выражений для функций $u_{r1}(y)$, $v_{r1}(y)$, $p_{r1}(y)$, учитывающих граничные условия на свободной поверхности:

$$u_{r1}(y) = i\frac{gk}{i\omega}a_1\mathrm{ch}(ky) - i\omega a_1\mathrm{sh}(ky),\ v_{r1}(y) = i\omega a_1\mathrm{ch}(ky) - i\frac{gk}{i\omega}a_1\mathrm{sh}(ky),$$

$$p_{r1}(y) = -i\rho_1 g a_1\mathrm{ch}(ky) + \rho_1\frac{(i\omega)^2}{k}a_1\mathrm{sh}(ky),\ -d_1 < y < 0.$$

Теперь переходим к процедуре вывода граничных условий на границе раздела двуслойной жидкости.

Этап 1.2. Процедура вывода граничных условий на границе раздела двуслойной жидкости. Результаты таковы:

Сводка результатов выполненного расчета значений функций $v_{r1}(y)$, $p_{r1}(y)$, $v_{r2}(y)$, $p_{r2}(y)$ на границе раздела:

$$v_{r1}\big|_{y=-d_1} = -\frac{1}{i\omega}(\mathrm{ch}(kd_1)\omega^2 - gk\mathrm{sh}(kd_1))a_1,$$

$$p_{r1}\big|_{y=-d_1} = -\frac{1}{k}\rho_1(\mathrm{sh}(kd_1)\omega^2 + igk\mathrm{ch}(kd_1))a_1,$$

$$v_{r2}\big|_{y=-d_1} = \mathrm{sh}(kd_2)D,\ p_{r2}\big|_{y=-d_1} = -\rho_2\mathrm{ch}(kd_2)\frac{i\omega}{k}D.$$

Теперь сопоставление сводки результатов расчета значений на границе раздела функций $v_{r1}(y)$, $v_{r2}(y)$ и разности $p_{r1}(y) - p_{r2}(y)$ со сводкой граничных условий на границе раздела двуслойной жидкости, имеющей следующий вид:

$$v_{r1}\big|_{y=-d_1} = i\omega a_2,\ v_{r2}\big|_{y=-d_1} = i\omega a_2,\ p_{r1}\big|_{y=-d_1} - p_{r2}\big|_{y=-d_1} = (\rho_1 - \rho_2)ga_2$$

после естественных преобразаний, целью которых является приведение к стандартной форме, будет иметь такой результат.

Система трех линейных однородных уравнений для амплитуд синусоидальных волн на свободной поверхности и на границе раздела a_1, a_2 и вспомогательного параметра D:

$$(\mathrm{ch}(kd_1)\omega^2 - gk\mathrm{sh}(kd_1))a_1 - \omega^2 a_2 = 0,\ i\omega a_2 - \mathrm{sh}(kd_2)D = 0,$$

$$\rho_1(\mathrm{sh}(kd_1)\omega^2 - gk\mathrm{ch}(kd_1))a_1 + (\rho_1 - \rho_2)gka_2 - \rho_2\mathrm{ch}(kd_2)i\omega D = 0.$$

Запишем эту систему в матричной форме следующим образом:

$$\mathbf{BA} = 0, \tag{6.1}$$

где

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \ \mathbf{A} = (a_1, a_2, D)^{\mathrm{T}}.$$

$$b_{11} = \mathrm{ch}(kd_1)\omega^2 - gk\mathrm{sh}(kd_1),\ b_{12} = -\omega^2,\ b_{13} = 0,\ b_{21} = 0,\ b_{22} = i\omega,\ b_{23} = -\mathrm{sh}(kd_2),$$
$$b_{31} = \rho_1\mathrm{sh}(kd_1)\omega^2 - gk\mathrm{ch}(kd_1),\ b_{32} = (\rho_1 - \rho_2)gk,\ b_{33} = -\rho_2\mathrm{ch}(kd_2)i\omega.$$

Теперь перейдем к анализу условия существования нетривиального решения матричного уравнения (6.1).

7. Анализ условия существования нетривиального решения матричного уравнения (6.1)

Как известно, необходимым и достаточным условием существования нетривиального решения матричного уравнения (6.1) является равенство нулю определителя матрицы **B**:

$$\det \mathbf{B} = 0. \tag{7.1}$$

Изменяя немного существующую традицию применительно к рассматриваемой задачи, для левой части равенства (7.1) введем следующее определение.

Определение 7.1. Определитель матрицы **B** относительно частоты синусоидальных колебаний в двуслойной среде ω называется *характеристическим многочленом* задачи о синусоидальных колебаниях двуслойной жидкости.

Таким образом, критерий существования нетривиального решения матричного уравнения (7.1) можно сформулировать следующим образом. Необходимым и достаточным условием существования нетривиального решения матричного уравнения (7.1) является равенство нулю характеристического многочлена задачи о синусоидальных колебаниях двуслойной жидкости.

Следовательно, необходимо выполнить процедуру расчета *характеристического многочлена* задачи о синусоидальных колебаниях двуслойной жидкости, то есть выполнить процедуру расчета определителя матрицы **B**.

Результат процедуры расчета характеристического многочлена задачи о синусоидальных колебаниях двуслойной жидкости таков.

Выражение для характеристического многочлена задачи о синусоидальных колебаниях двуслойной жидкости:

$$\det \mathbf{B} = (\rho_1\mathrm{sh}(kd_1)\mathrm{sh}(kd_2) + \rho_2\mathrm{ch}(kd_1)\mathrm{ch}(kd_2))\omega^4 - \rho_2 gk\mathrm{sh}(kH)\omega^2 -$$
$$- (\rho_1 - \rho_2)(gk)^2\mathrm{sh}(kd_1)\mathrm{sh}(kd_2).$$

Из этого выражения и уравнения (7.1) следует такое уравнение для частоты синусоидальных волн:

$$(\rho_1\mathrm{sh}(kd_1)\mathrm{sh}(kd_2) + \rho_2\mathrm{ch}(kd_1)\mathrm{ch}(kd_2))\omega^4 - \rho_2 gk\mathrm{sh}(kH)\omega^2 - \\ - (\rho_1 - \rho_2)(gk)^2\mathrm{sh}(kd_1)\mathrm{sh}(kd_2) = 0. \tag{7.2}$$

Это есть *биквадратное уравнение для частоты синусоидальных колебаний* ω. Сложность делать определенные выводы состоит в том, что корнями квадратного уравнения не обязательно являются действительными корнями. Сказанное тем более относится к биквадратным уравнениям. Поэтому здесь требуется кропотливый анализ.

Для удобства исследования введем следующие обозначения:

$$P = \rho_1\mathrm{sh}(kd_1)\mathrm{sh}(kd_2) + \rho_2\mathrm{ch}(kd_1)\mathrm{ch}(kd_2),\ Q = \rho_2 gk\mathrm{sh}(kH), \\ R = -(\rho_1 - \rho_2)(gk)^2\mathrm{sh}(kd_1)\mathrm{sh}(kd_2).$$

Благодаря этим обозначениям уравнение (7.2), определяющее дисперсионные соотношения для синусоидальных волн в двухслойной жидкости, принимает вид

$$\det \mathbf{B} = P\omega^4 - Q\omega^2 + R = 0.$$

Запишем это соотношение так: $B(\omega) = 0$, где биквадратный многочлен $B(\omega)$ определен равенством

$$B(\omega) = P\omega^4 - Q\omega^2 + R.$$

Теперь сформулируем одно очевидное утверждение.

Утверждение 7.1. *Все три коэффициента P, Q и R многочлена $B(\omega)$ имеют положительные значения*.

В следующем пункте 8 мы приступим к выводу и анализу дисперсионных соотношений для синусоидальных волн в двуслойной жидкости, используя для этой цели уравнение (7.2).

8. Анализ выражения для характеристического многочлена задачи о синусоидальных колебаниях двуслойной жидкости. Вывод дисперсионных соотношений для синусоидальных волн в двуслойной жидкости

Анализ корней уравнения (7.2) начнем с вывода выражения для его дискриминанта. Результат такой:

$$\mathrm{Diskr} = Q^2 - 4PR = (gk)^2(4\mathrm{sh}^2(kd_1)\mathrm{sh}^2(kd_2)\,\rho_1^2\ + \\ + 4\mathrm{sh}(kd_1)\mathrm{sh}(kd_2)\mathrm{ch}(k(d_1 - d_2))\rho_1\rho_2 + (\mathrm{sh}^2(kH) - \\ - 4\mathrm{sh}(kd_1)\mathrm{ch}(kd_1)\mathrm{sh}(kd_2)\mathrm{ch}(kd_2))\,\rho_2^2) > 0. \tag{8.1}$$

Замечание 8.1. Величина Diskr является квадратичной формой относительно плотностей ρ_1 и ρ_2, которая приведена к каноническому виду.

Изучив эту квадратичную форму на знакоопределенность, получаем следующий результат.

Утверждение 8.1. *Выражение* (8.1) *для дискриминанта многочлена* $B(\omega)$ *принимает только положительные значения*.

Более точная оценка такова:

$$\mathrm{Diskr} > (gk)^2 \mathrm{sh}^2(kH)\,\rho_1^2 .$$

Следствием утверждений (7.1) и (8.1) является такое утверждение.

Утверждение 8.2. *Корни уравнения* (8.1), *то есть уравнения*

$$P\,\omega^4 - Q\,\omega^2 + R = 0, \tag{8.2}$$

которым определены дисперсионные соотношения для синусоидальных волн в двуслойной жидкости, являются действительными величинами, причем они распадаются на пары симметричных выражений.

Теперь можно привести утверждение, в котором приводятся явные выражения для корней уравнения (8.2), или, что равносильно, явные выражения для дисперсионных соотношений (зависимостей частоты от волнового числа).

Утверждение 8.3. *Выражения для корней уравнения* (8.2) *имеют следующий вид*:

$$\omega = \omega_{surf} = \frac{Q + \sqrt{\mathrm{Discr}}}{2P},\ \omega = \omega_{intern} = \frac{Q - \sqrt{\mathrm{Discr}}}{2P}.$$

9. Дисперсионные соотношения в приближении Буссинеска

В этом пункте будет получены дисперсионные соотношения в *приближении Буссинеска*.

Определение приближения Буссинеска:

$$\rho_1 = \rho - 2^{-1}\Delta\rho,\ \rho_2 = \rho + 2^{-1}\Delta\rho,$$

причем выполнено следующее условие:

$$\Delta\rho \ll \rho.$$

Замечание 9.1. Величина $\Delta\rho$ — перепад плотности при переходе через границу раздела двуслойной среды

Выполнив расчет коэффициентов уравнения (8.2), которое определяет дисперсионные соотношения, в приближении Буссинеска, получим следующий результат:

Сводка значений коэффициентов уравнения (8.2) в приближении Буссинеска:

$$P = \rho\mathrm{ch}(kH) + 2^{-1}(\mathrm{ch}(k(d_1 - d_2))\Delta\rho,\ Q = (\rho + 2^{-1}\Delta\rho)gk\mathrm{sh}(kH),$$
$$R = (gk)^2\mathrm{sh}(kd_1)\mathrm{sh}(kd_2)\Delta\rho.$$

Используя результаты расчета коэффициентов уравнения (8.2) в приближении Буссинеска, получаем следующее утверждение.

Утверждение 9.1. *Уравнение, которое определяет дисперсионные соотношения в приближении Буссинеска, имеет следующий вид*:

$$(\rho \mathrm{ch}(kH) + 2^{-1}(\mathrm{ch}(k(d_1 - d_2))\Delta\rho)\omega^4 - (\rho + 2^{-1}\Delta\rho)gk\mathrm{sh}(kH)\omega^2 - \\ - (gk)^2\mathrm{sh}(kd_1)\mathrm{sh}(kd_2)\Delta\rho = 0. \tag{9.1}$$

Переходим к процедуре нахождения приближенного решения уравнения (9.1), используя для этой цели приближение Буссинеска. В соответствующих выкладках будут опущены слагаемые, которые являются членами 2-го порядка малости по сравнению с перепадом плотности $\Delta\rho$.

Собственно говоря, именно в этом месте впервые используется приближение Буссинеска.

Сама процедура будет состоять из двух этапов.

На первом этапе будет получено нулевое приближение решения уравнения (9.1), в процессе которого считается, что $\Delta\rho = 0$. На втором этапе — более точное решение, учитывающее, что в действительности

$$\Delta\rho > 0 \to \Delta\rho \neq 0.$$

Таким образом, процедура нахождения приближенного решения уравнения (9.1) будет состоять из двух этапов.

Переходим к выполнению процедуры нахождения приближенного решения уравнения (9.1), используя для этой цели приближение Буссинеска.

Процедура нахождения приближенного решения уравнения (9.1) с помощью приближения Буссинеска.

Этап 1. Процедура получения нулевого приближения решения уравнения (9.1).

Пусть в уравнении (9.1) $\Delta\rho = 0$. Тогда будем иметь

$$\rho \mathrm{ch}(kH)(\omega^2 - gk\mathrm{th}(kH))\omega^2 = 0.$$

Фактически доказано следующее утверждение.

Утверждение 9.2. *Существуют два тривиальных приближенных решения уравнения* (9.1), *которые имеют следующие значения*:

$$\omega^2 = 0,$$
$$\omega^2 = \omega^2_{surfase,0} = gk\mathrm{th}(kH),\ \omega_{surface,0} = \sqrt{gk\,\mathrm{th}(kH)}\ .$$

Этап 1 завершен.

Переходим к выполнению этапа 2 процедуры нахождения приближенных решений уравнения (9.1) с помощью приближения Буссинеска. Здесь придется последовательно рассмотреть 2 случая, поскольку мы должны найти уточняющие поправки к двум разным нулевым приближенным решениям.

В обоих случаях для уточняющих поправок будут использованы естественные исходные выражения.

Итак, переходим к выполнению этапа 2.

Этап 2. Процедура получения нетривиальных (ненулевых) приближенных решений уравнения (9.1).

Случай 1. Рассматривается процедура получения уточняющей поправки к нулевому (тривиальному) решению уравнения (9.1) и основные следствия результата этой процедуры.

Исходное представление уточняющей поправки к нулевому (тривиальному) решению уравнения (9.1):

$$\omega^2 = \omega_{\text{intern}}^2 .$$

Сама поправка такова:

$$\omega_{\text{intern}}^2 = \frac{(gk)\,\text{sh}(kd_1)\,\text{sh}(kd_2)}{\text{sh}(kH)}\,\Delta\rho \to$$

Выражение для частоты ω:

$$\omega_{intern} = \sqrt{\frac{(gk)\,\text{sh}(kd_1)\,\text{sh}(kd_2)}{\text{sh}(kH)}}\,\sqrt{\Delta\rho}\,.$$

Замечание 9.2. Величина ω_{intern} фактически является частотой внутренних волн в приближении Буссинеска.

Приведем еще выражение для фазовой скорости внутренних волн.

Выражение для фазовой скорости внутренних волн:

$$c_{intern} = \sqrt{\frac{g\,\text{sh}(kd_1)\,\text{sh}(kd_2)}{k\,\text{sh}(kH)}}\,\sqrt{\Delta\rho}\,.$$

В длинноволновом приближении фазовая скорость внутренних волн имеет следующее значение.

Выражение для фазовой скорости внутренних волн в длинноволном приближении:

$$c_{intern} = \sqrt{\frac{gd_1d_2\Delta\rho}{H}}\,.$$

Случай 2. Рассматривается процедура получения уточняющей поправки к ненулевому (нетривиальному) решению уравнения (9.1) и основные следствия результата этой процедуры.

Исходное представление уточняющей поправки к нулевому (тривиальному) решению уравнения (9.1):

$$\omega^2 = \omega_{\text{surface}}^2 .$$

Сама поправка такова.

Выражение для частоты $\omega_{surface}$ поверхностных волн:

$$\omega_{surface} = \sqrt{\frac{(gk)\,\text{sh}(kd_1)\,\text{sh}(kd_2)}{\text{sh}(kH)}}\,\sqrt{\Delta\rho}\,.$$

Замечание 9.3. Величина $\omega_{surface}$ фактически является частотой поверхностных волн в приближении Буссинеска.

Приведем еще выражение для фазовой скорости поверхностных волн.

Выражение для фазовой скорости поверхностных волн:

$$c_{surface} = \sqrt{\frac{g\,\mathrm{sh}(kd_1)\,\mathrm{sh}(kd_2)}{k\,\mathrm{sh}(kH)}}\,\sqrt{\Delta\rho}\,.$$

В длинноволновом приближении фазовая скорость поверхностных волн имеет следующее значение.

Выражение для фазовой скорости поверхностных волн в длинноволном приближении:

$$c_{surface} = \sqrt{\frac{gd_1d_2\Delta\rho}{H}}\,.$$

Замечание 9.4. Фазовые скорости длинных поверхностных и внутренних волн от волнового числа не зависят, то есть эти волн не обладают дисперсией.

Заключение

В настоящее время нами завершается решение задачи о синусоидальных волнах в слоистой жидкости с произвольным числом слоев. Успеху существенно способствует созданная нами новая методика.

Список литературы

1. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений идеальной жидкости. М., 1977.
2. *Каменкович В. М.* О нормальных колебаниях многослойной вращающей жидкости // Физика атмосферы и океана. 1967. Т. 111, № 3. С. 284—290.

Об авторах

Анатолий Алексеевич Зайцев — канд. физ.-мат. наук, Калининград.
E-mail: kulakov_petr@mail.ru

Петр Алексеевич Кулаков — главный специалист, ООО «Центр защиты информации», Калининград.
E-mail: kulakov_petr@mail.ru

About authors

Dr Anatoly Zaitsev — Kaliningrad.
E-mail: kulakov_petr@mail.ru

Petr Kulakov — chief specialist, Protection Information Center Ltd., Kaliningrad.
E-mail: kulakov_petr@mail.ru